Chapitre 27

Vecteurs propres, valeurs propres, diagonalisation.

Motivation

Soit $f : (x, y) \to (2x, -2x - y)$. Écrire la matrice A de f dans la base canonique puis la matrice B dans la base $((3/2, -1), (0, 1))$. Laquelle vous parait la plus simple ?
Calculer $f^{10}(1, 1)$.

I Rappel sur les matrices d'applications linéaires et changement de base

1) Matrice d'une application linéaire

Définition 1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie p et n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On appelle matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, notée $M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le n}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ où pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ème colonne contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$:

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix} \end{array} \quad \text{où} \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i.$$

Remarque. $\dim(E)$ = nombre de colonnes de la matrice, $\dim(F)$ = nombre de lignes de la matrice.

Cas d'un endomorphisme. $E = F$, on prend alors la même base au départ et à l'arrivée $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, et pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, on note plus simplement $M_{\mathscr{B}}(f) = M_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple. $M_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$.

Exercice. Écrire la matrice de $f : (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que cette matrice permet de faire le calcul des coordonées des images par f :

Proposition 1

Supposons E et F de dimension finie, et considérons $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ des bases respectives de E et F. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$. Notons alors :
- *A la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$;*
- *X la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$;*
- *Y la matrice colonne des coordonnées de $y = f(x)$ dans la base $\mathscr{C}$.*

Alors :

$$Y = AX.$$

2) Matrices de passage

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $M_{\mathscr{B}}(f)$ et $M_{\mathscr{B}'}(f)$ sont a priori deux matrices différentes. Nous expliquons ici comment passer de l'une à l'autre.

Définition 2

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$.
Plus précisément, si on note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $P = (p_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$, alors :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_j & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,j} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,j} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,j} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \quad o \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i.$$

Remarque. Par définition, on a $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ puisque :

$$M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathrm{Id}(e'_1) & \dots & \mathrm{Id}(e'_j) & \dots & \mathrm{Id}(e'_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{1,1} & \dots & p_{1,j} & \dots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & \dots & p_{2,j} & \dots & p_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n,1} & \dots & p_{n,j} & \dots & p_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

Exercice. Considérons la famille $\mathscr{B} = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(1,2,1,0),(1,3,3,1))$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, et écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}_c$ à la base $\mathscr{B}$.

Proposition 2

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E de dimension finie. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible, d'inverse :

$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$

▷ *Preuve :*

◁

3) Changement de bases

Proposition 3

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Notons :
- *X la matrice de x dans la base $\mathscr{B}$;*
- *X' la matrice de x dans la base $\mathscr{B}'$;*
- *P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

Alors :

$$X = PX'.$$

▷ *Preuve :*

◁

Théorème 1 (*de changement de bases*)

Supposons E de dimension finie, et soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons :
- *A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$;*
- *A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$;*
- *P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.*

Alors :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Les matrices A et A' sont dites **semblables**.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple.
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer P^{-1} puis montrer que $B = PAP^{-1}$. A et B sont donc semblables.

Contre-exemple
Montrer que I_3 et A ne sont pas semblables.

Exercice. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Écrire explicitement $f(u)$ pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, avec $\varepsilon_1 = (1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (-1, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{C}$.
4. En déduire la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Vecteurs propres et espaces propres d'un endomorphisme

Définition 3

— *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une* ***valeur propre*** *de f lorsque :*

$$\exists x \in E \backslash \{0_E\}, \quad f(x) = \lambda \cdot x$$

— *On dit alors qu'un vecteur* ***non nul*** *$x \in E$ est un* ***vecteur propre*** *de f associé à la valeur propre λ si :*

$$f(x) = \lambda \cdot x$$

— *On appelle* ***spectre*** *de f, et on note $\mathrm{Sp}(f)$, l'ensemble des valeurs propres de f.*

Exercice.
$E = \mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -2x + y + 2z, -2x - 2y + 5z).$$

Montrer que $u = (1, 0, 1)$ est un vecteur propre de f et déterminer la valeur propre λ associée.

Remarque : Pour tout $x \in E$:

$$f(x) = \lambda \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad (f - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

On introduit alors la définition suivante :

Définition 4

Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ, et on note $E_\lambda(f)$, le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$E_\lambda(f) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

$E_\lambda(f)$ est ainsi constitué de tous les vecteurs propres associés à λ et du vecteur nul 0_E.

Exercice.
Déterminer $E_\lambda(f)$ dans l'exercice précédent.

Théorème 2 (*Caractérisation des valeurs propres d'un endomrphisme.*)

Supposons E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(f) &\Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, \quad f(x) = \lambda \cdot x \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\Leftrightarrow \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)\right) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)) < n \text{ par le th. du rang} \\ &\Leftrightarrow (f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) \text{ n'est pas bijective.}\end{aligned}$$

Exercice :
Avec l'application f des exercices précédents, montrer que 1 est valeur propre et déterminer $E_1(f)$.

Remarque : Une valeur propre particulière à chercher en premier est 0. On a la propriété suivante :

Proposition 4

En dimension finie, on a l'équivalence suivante :

$$0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow f \text{ n'est pas bijective}$$

Et $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f)$.

III Vecteurs propres et espaces propres d'une matrice carrée

La définition précédente s'étend naturellement aux matrices, vu comme représentatives d'un endomorphisme. On a donc :

Définition 5

— *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une* ***valeur propre*** *de f lorsque :*

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad AX = \lambda X$$

— *On dit alors qu'une matrice colonne* ***non nul*** *$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un* ***vecteur propre*** *de A associé à la valeur propre λ si :*

$$AX = \lambda X$$

— *On appelle* ***spectre*** *de A, et on note $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.*

— *On note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ le* ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre λ comme précédemment.*

Remarque : cette définition coïncide avec la définition précédente en posant $f : X \to AX$.

Proposition 5

Deux matrices semblables A et A' ont les mêmes valeurs propres et des sous-espaces propres de même dimension.
La réciproque n'est pas vraie !

▷ *Preuve :*

◁

Tous les résultats vus sur les endomorphismes se transposent en termes matriciels :

Théorème 3 (*Caractérisation des valeurs propres pour une matrice*)

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(A) &\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow (A-\lambda I_n) \text{ n'est pas inversible} \end{aligned}$$

De plus, $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A-\lambda I_n)$.

La valeur propre 0 est, ici aussi, à chercher en premier :

Proposition 6 (*Cas particulier : la valeur propre 0*)

On a les équivalences :

$$0 \in Sp(A) \quad \Leftrightarrow \quad rg(A) < n \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ n'est pas inversible.}$$

De plus, $\dim(E_0(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Enfin, il y a un lien entre les éléments propres d'une matrice et de sa transposée :

Proposition 7

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres, et $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$ *pour tout $\lambda \in Sp(A)$.*

▷ *Preuve :*

◁

A noter :

En revanche, les sous-espaces propres de A et ${}^tA$ n'ont aucune raison d'être égaux : un vecteur X vérifiant $AX = \lambda X$ ne satisfera pas nécessairement ${}^tAX = \lambda X$.

IV Recherche d'éléments propres

Vocabulaire. Déterminer les *éléments propres* d'un endomorphisme ou d'une matrice, c'est déterminer :

- toutes ses valeurs propres ;
- le sous-espace propre associé à chacune des valeurs propres (souvent en donnant une base de ce sous-espace vectoriel).

1) Cas des matrices 2×2

Proposition 8 (*Cas des matrices* 2×2)

Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda \in Sp(A) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est racine de } x^2 - Tr(A)x + \det(A).$$

▷ *Preuve :*

◁

Exercice. Déterminer les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$.

2) Cas des matrices triangulaires

Proposition 9

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux.

▷ *Preuve :*

◁

Exemple. Les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ sont $-2, 0, 5$.

Proposition 10

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$. Alors, le spectre de p est $Sp(p) = \{0, 1\}$.

▷ *Preuve :*

◁

3) Utilisation d'un polynôme annulateur

Proposition 11

Soit $\lambda \in Sp(f)$, et $u \in E_\lambda(f)$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$:

$$P(f)(u) = P(\lambda) \cdot u.$$

▷ *Preuve :*

◁

Proposition 12

*Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme annulateur de $f \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Alors les valeurs propres de f (resp. A) sont **parmi** les racines de P.*

▷ *Preuve :*

◁

A noter :

Attention, il n'y a **pas de réciproque** : une racine de P n'est pas forcément valeur propre de f. Par exemple $x(x-1)$ est un polynôme annulateur de Id_E. Donc les valeurs propres **possibles** pour Id_E sont 0 et 1. Réciproquement, seul 1 est valeur propre de Id_E.

Exemple. Supposons E de dimension finie n, et soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de rang $r \in [\![1, n-1]\!]$, sur F parallèlement à G. Puisque $p \circ p = p$, $x^2 - x$ est un polynôme annulateur de p. Donc les valeurs propres **possibles** de p sont 0 et 1.
Vérifions que ce sont bien des valeurs propres de p :

— $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p) = G$, et $\dim(E_0(p)) = n - \mathrm{rg}(p) = n - r > 0$ par le théorème du rang. Donc 0 est bien valeur propre de p.
— $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = F = \mathrm{Im}(p)$. Or $\dim(\mathrm{Im}(p)) = r > 0$. Donc 1 est bien valeur propre de p.

Exercice. Déterminer les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice. Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme f nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ (c'est-à-dire tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^{k-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$).

4) Cas général

Méthode : *Recherche des valeurs propres « à vue ».*
On pourra tenter de trouver directement, lorsque cela est facile :
— un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_n$ est de rang $< n$;
— une matrice colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle qui satisfait $AX = \lambda X$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. On pourra tester notamment $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ qui conviendra lorsque la somme des coefficients de chaque ligne de A est identique.
Si l'un de ces points est satisfait, λ est valeur propre de A.

Exercice. Donner deux valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Méthode :

Si aucune des méthodes précédentes ne fonctionne, **en dernier recours**, on résout le système $AX = \lambda X$ d'inconnue X et on regarde pour quelles valeurs de λ on trouve des solutions non nulles.
Alternativement, on peut échelonner la matrice (mais alors on n'aura pas directement les espaces propres).

Exercice. Déterminer le spectre et les espaces propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V Propriétés générales

1) Sous-espaces propres stables

Définition 6

Soient E un EV, $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E.
On dit que F est stable par f si, pour tout vecteur u de F, on a $f(u) \in F$. Autrement dit :

$$F \text{ stable par } f \Leftrightarrow f(F) \subset F$$

Remarque : c'est la définition de stabilité qu'on a déjà quand on dit "stable par combinaison linéaire". Cette appellation est logique en sens où stable = ne bouge pas et c'est précisément la situation ici : appliquer f ne fait pas bouger F.

Proposition 13

- *Soient f et g des endomorphismes de E qui commutent. Alors tout sous-espace propre de f est stable par g.*
- *Pour tout $\lambda \in Sp(f)$, $E_\lambda(f)$ est stable par f. L'**endomorphisme induit** par f sur $E_\lambda(f)$ est l'homothétie de rapport λ.*

▷ *Preuve :*

◁

Remarque. Comme on l'a expliqué dans l'introduction, il est difficile de comprendre « géométriquement » la façon dont $f \in \mathscr{L}(E)$ agit sur E tout entier. La propriété précédente nous dit que sur chacun des sous-espaces propres $E_\lambda(f)$, cette application linéaire agit très simplement : elle transforme $x \in E_\lambda(f)$ en $\lambda \cdot x$.

2) Somme directe de sous-espaces propres

Proposition 14

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{p-1}[x]$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}.$$

La famille $(L_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est appelée famille des polynômes de Lagrange associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Remarque : Nous les avons vu en DM cette année ! Je vous refais tout de même la preuve car c'est un grand classique.

▷ *Preuve :*

◁

Proposition 15

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ des valeurs propres deux à deux distinctes de $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ est directe.

▷ *Preuve :*

◁

3) Conséquences

Proposition 16

Une famille de vecteurs propres de f associée à des valeurs propres distinctes est libre.

▷ *Preuve :*

◁

Corollaire 1

— *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f possède au plus $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes.*
— *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A possède au plus n valeurs propres distinctes.*

▷ *Preuve :*

◁

Remarque. Il se peut bien évidemment que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède strictement moins de n valeurs propres. Par exemple :

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède une seule valeur propre 1.
— $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne possède aucune valeur propre réelle. En effet :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \mathrm{Tr}(B)\lambda + \det(B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 1 = 0.$$

Cette équation n'ayant pas de solution réelle, il n'y a pas de valeur propre réelle.

Corollaire 2

L'inégalité suivante est satisfaite :

$$\sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq n = \dim(E).$$

▷ *Preuve :*

◁

Remarque. Il n'y a pas égalité en général. On a vu par exemple que pour $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$ et $\dim(E_1(A)) = \dim(E_2(A)) = 1$, et donc :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_1(A)) + \dim(E_2(A)) = 2 < 3.$$

Exercice. Déterminer toutes les valeurs propres de $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Corollaire 3

— *Si $f \in \mathscr{L}(E)$ possède $n = \dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors les sous-espaces propres sont tous de dimension* 1.
De plus, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
— *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes, alors tous ses sous-espaces propres sont de dimension* 1.
De plus, il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

▷ *Preuve :*

◁

Exercice. Que peut-on dire de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$?